

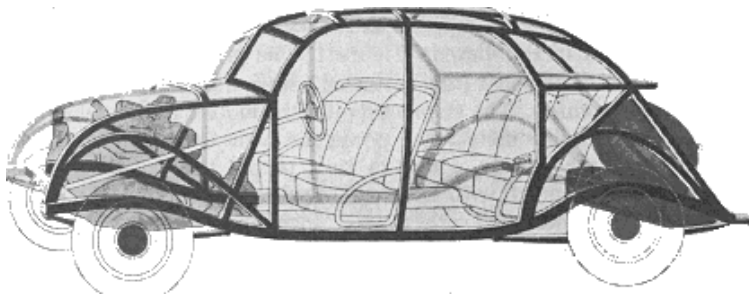
기계설계

(Beam and Frame)

Hyungmin Jun, Ph. D.

Multiphysics Systems Design Laboratory
Department of Mechanical System Engineering
Jeonbuk National University

- ▣ 빔(Beam)과 프레임(Frame)은 건설, 엔지니어링 장비 및 일상 생활에서 자주 사용
- ▣ 빔은 주로 횡 방향 하중을 받는 가느다란 구조 부재
- ▣ 프레임은 두 개 이상의 견고하게 연결된 빔으로 구성된 구조물



Beams and Frames used in a car and an exercise machine

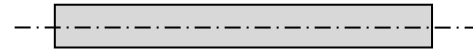
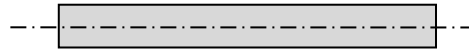
빔 이론 복습



□ Euler-Bernoulli Beam vs Timoshenko Beam

✓ 이 두 모델은 그 핵심에 1) 미소변형과 2) 선형 탄성 등방성 재료 거동의 가정을 포함하며, 균일 단면 빔에 모두 적용할 수 있다

Reference:



Deformed:



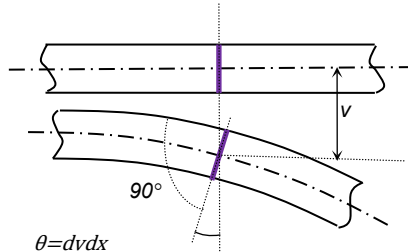
Euler-Bernoulli beam

Timoshenko beam

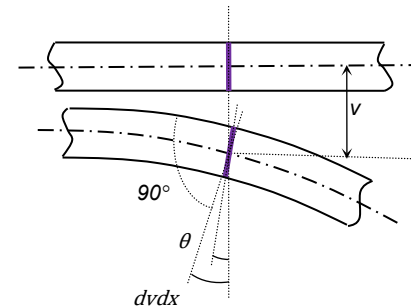
Two common beam models

□ Euler-Bernoulli Beam vs Timoshenko Beam

- ✓ Euler-Bernoulli 빔에 작용하는 하중은 빔의 ① 굽힘만을 일으킨다고 가정. ② 평면 단면은 변형 후 평면과 중립 축에 수직을 유지
- ✓ Timoshenko 빔에서는 ① 횡방향 전단 변형과 굽힘 변형을 모두 고려. 이 모델에서 ② 평면의 단면은 변형 후에 평면을 유지하나 중립축에 수직으로 유지되지 않음



Euler-Bernoulli beam

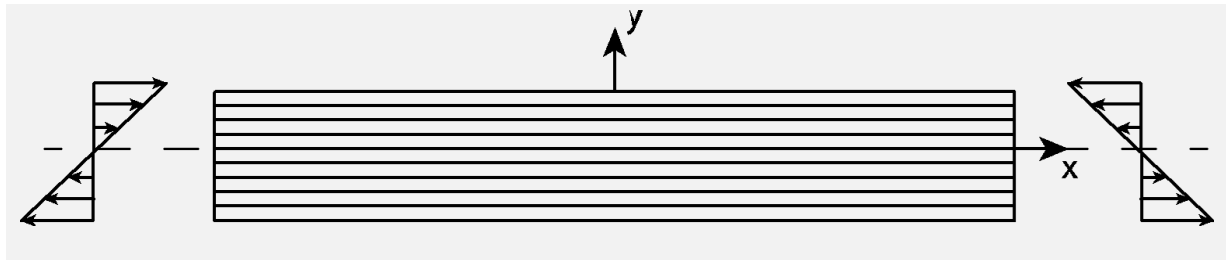


Timoshenko beam

Euler-Bernoulli Beam과 Timoshenko Beam의 처짐

□ 응력, 변형률, 처짐 관계

✓ 단순 보의 굽힘은 그 단순성으로 인하여 자주 Euler-Bernoulli 빔 이론으로 해석되며, 공학에서 널리 사용



굽힘은 보에서 얇은 층들을 따라 축방향 응력 $\sigma(x)$ 을 발생

✓ 굽힘변형률: $\varepsilon(x) = -y\kappa(x) = -y \frac{d^2 v}{dx^2}$

✓ 굽힘모멘트: $M(x) = \int -y\sigma(x) dA = \int Ey^2 \kappa(x) dA = EI \kappa(x) = EI \frac{d^2 v}{dx^2}$

✓ 굽힘응력: $\sigma(x) = -\frac{M(x)y}{I}$



- ✓ 단순 보 이론은 단축 Hooke의 법칙과 유사
- ✓ 굽힘모멘트는 굽힘강성(EI) 상수를 통해 처짐보의 곡률(deflected beam curvature)에 선형적 비례
- ✓ Hooke의 법칙에 의해 설명되는 선형 응력-변형률 관계와 유사

바(Bar)와 빔(Beam) 대한 구성 방정식 사이의 유사성

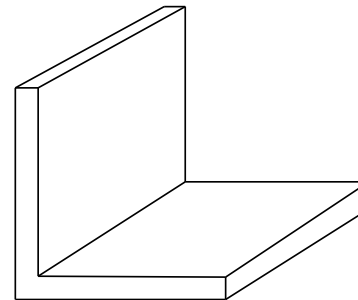
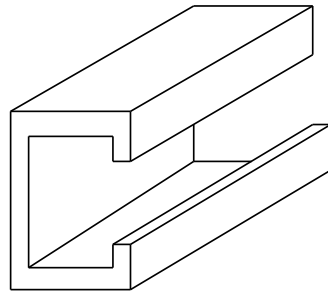
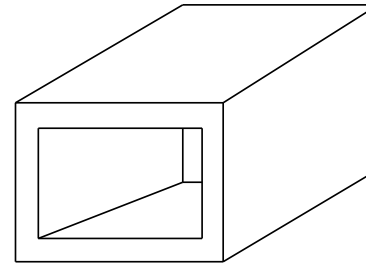
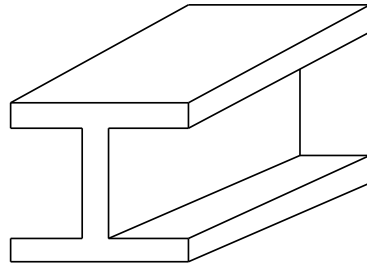
	응력 측정	변형률 측정	구성 방정식
봉	축방향 응력: $\sigma(x)$	축방향 변형률: $\varepsilon(x)$	$\sigma(x) = E\varepsilon(x)$
보	굽힘 모멘트: $M(x)$	곡률 : $\frac{d^2v}{dx^2}$	$M(x) = EI \frac{d^2v}{dx^2}$

빔과 프레임의 모델링



□ 단면과 강/약 축(Strong/Weak Axis)

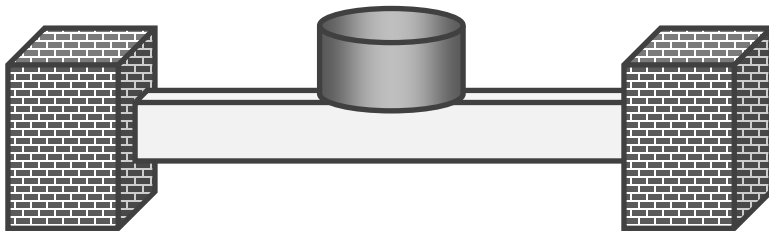
✓ 보에서는 여러 형태의 단면이 사용



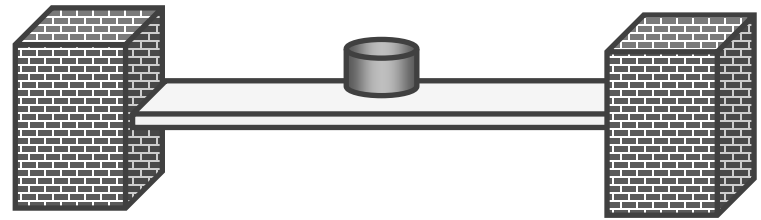
일반적인 보 단면의 형상



- ✓ 굽힘 강성 (EI)은 빔(Beam)의 굽힘 저항력의 척도
- ✓ 평평한 (넓은) 표면이 앞을 향하게 하면, 평평한 면이 위를 향하는 것보다 눈금자를 구부리기가 더 어려움



(a) Large load capacity in its strong-axis orientation



(b) Small load capacity in its weak-axis orientation

강축과 약축 방향에서 하중을 받는 빔



▣ 지지 조건

✓ 일반적으로 세 가지 형태의 끝 지지조건: 고정 지지, 핀 지지, 로울러 지지



단순지지보



외팔보



고정-핀 지지



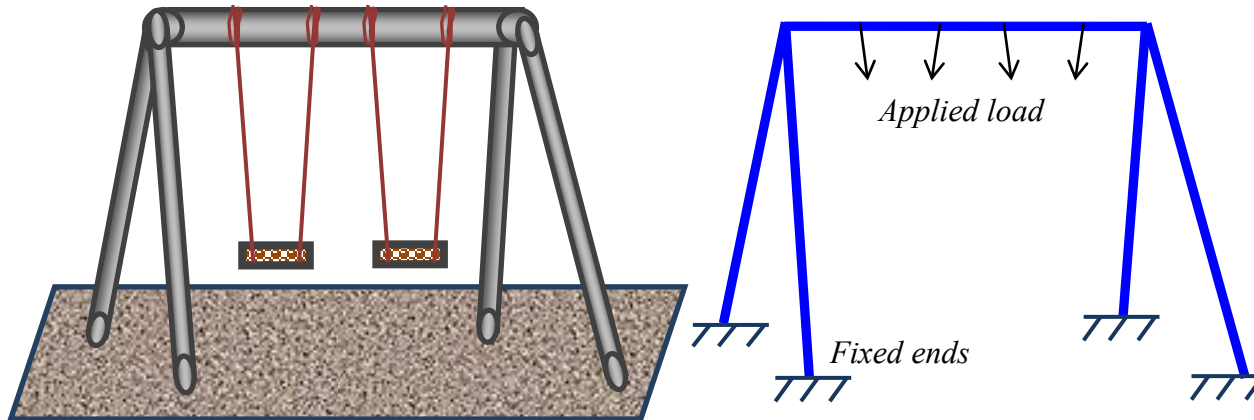
양단 고정보

빔(Beam) 지지와 종류



□ 물리적 모델을 선모델로 변환

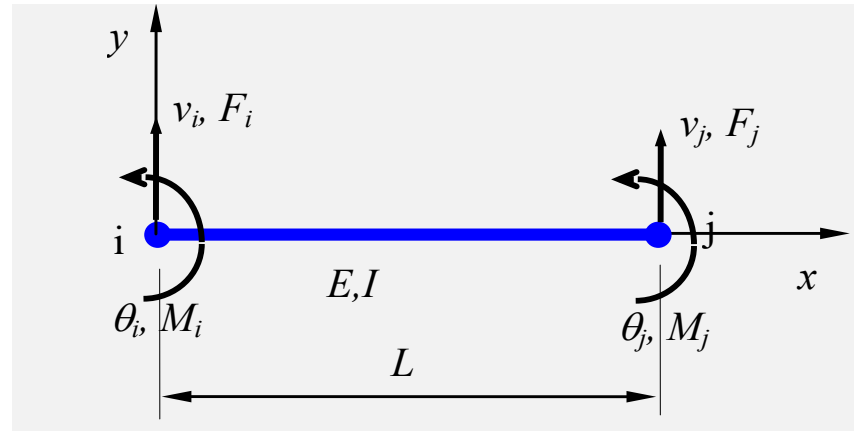
✓ 균일 한 단면일 경우, 빔은 실제 3D 구조의 중심 축 (중립 축)만 고려하여 간략히 모델



그네 세트와 단순화된 직선 모델

빔의 공식화

□ 단순 보 요소 모델링 설정:



L, I, E : 길이, 단면의 관성 모멘트, 보의 탄성계수

$v = v(x)$: 보의 중립축의 처짐 (횡방향 변위)

$\theta = \frac{dv}{dx}$: z축에 관한 보의 회전각

$Q = Q(x)$: (내력) 전단력

$M = M(x)$: z축에 관한 (내력) 굽힘모멘트

F_i, M_i, F_j, M_j : 절점 i, j에 가해진 (외력) 횡방향 하중과 모멘트



□ 요소강성방정식: 직접법

✓ 보에 대한 FE 방정식:

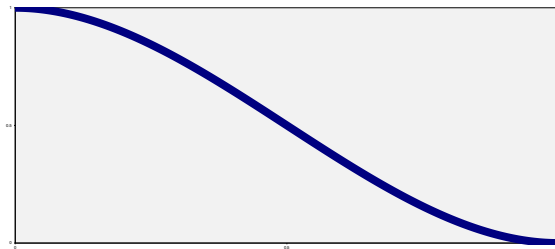
$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{Bmatrix}$$

✓ 예를 들어 첫 번째 열은 다음 형태를 유지하는 힘/모멘트

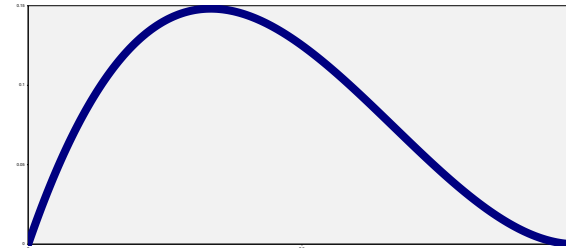
$$v_i = 1, \quad \theta_i = v_j = \theta_j = 0$$

✓ 자유단에 힘 k_{11} 과 모멘트 k_{21} 이 가해진 외팔보에 대한 재료강도학의 결과로부터 다음 결과를 얻음

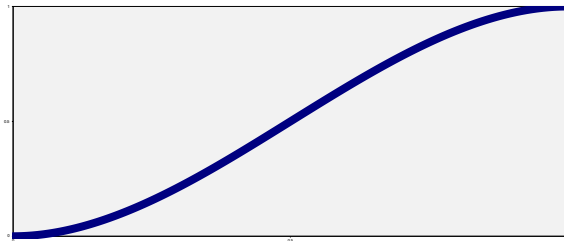
$$v_i = \frac{k_{11}L^3}{3EI} - \frac{k_{21}L^2}{2EI} = 1 \quad \text{and} \quad \theta_i = -\frac{k_{11}L^2}{2EI} + \frac{k_{21}L}{EI} = 0$$



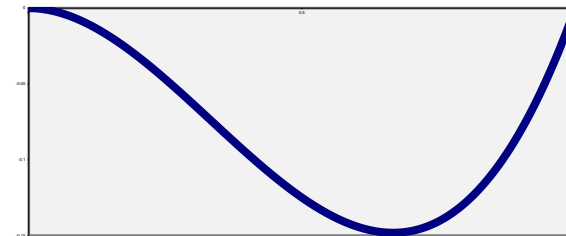
(a) $N_1(x)$



(b) $N_2(x)$



(c) $N_3(x)$



(d) $N_4(x)$

단순 보 요소의 4가지 모드 또는 형상



- ✓ 강성행렬의 각 열은 요소를 특수하게 변형된 모양으로 유지하는 데 필요로 한 힘
- ✓ 시스템 방정식을 풀면 다음을 얻음

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{Bmatrix}$$



□ 요소강성방정식 – 에너지 법

✓ 4개의 형상함수를 도입하면,

$$N_1(x) = 1 - 3x^2 / L^2 + 2x^3 / L^3$$

$$N_2(x) = x - 2x^2 / L + x^3 / L^2$$

$$N_3(x) = 3x^2 / L^2 - 2x^3 / L^3$$

$$N_4(x) = -x^2 / L + x^3 / L^2$$

✓ 각 요소에 대하여, 보의처짐(v):

$$v(x) = \mathbf{N}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) & N_4(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$



✓ 보의 곡률반지름을 고려하면,

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{N} \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{u}$$

✓ 변형률-변위 행렬 $\mathbf{B}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1''(x) & N_2''(x) & N_3''(x) & N_4''(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

✓ S보요소에 저장된 변형에너지는,

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV$$



✓ 단순보 이론에서 기본방정식을 적용하면,

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \left(-\frac{My}{I} \right)^T \frac{1}{E} \left(-\frac{My}{I} \right) dA dx = \frac{1}{2} \int_0^L M^T \frac{1}{EI} M dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^T EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^L (\mathbf{B}\mathbf{u})^T EI (\mathbf{B}\mathbf{u}) dx \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \left(\int_0^L \mathbf{B}^T EI \mathbf{B} dx \right) \mathbf{u} \end{aligned}$$

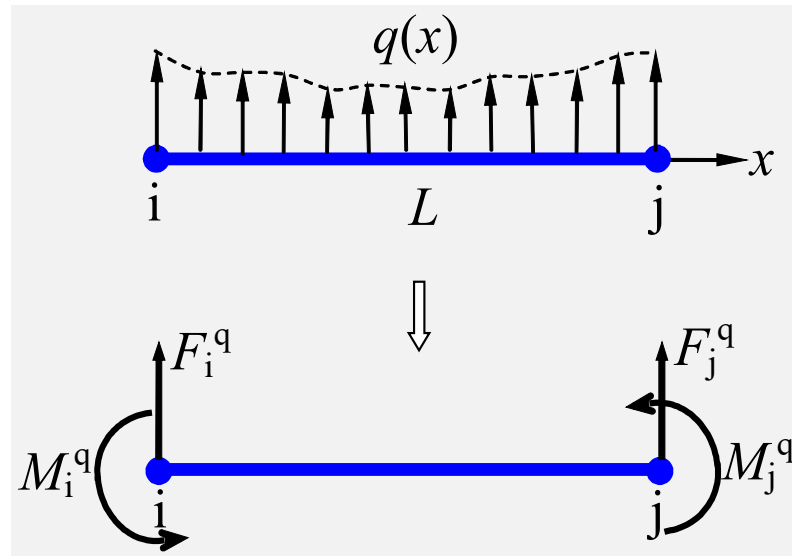
✓ 단순 보의 강성행렬은 다음 식으로 정의,

$$\mathbf{k} = \int_0^L \mathbf{B}^T EI \mathbf{B} dx$$

✓ 적분을 수행하면 직접 접근법(Direct Approach)과 동일한 강성 행렬을 얻을 수 있음



□ 분포하중의 처리



분포된 횡하중을 등가의 절점하중과 모멘트로 변환



✓ 분포하중 q 에 의한 일(work done)을 고려하면,

$$W_q = \frac{1}{2} \int_0^L v(x) q(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^L (\mathbf{N}\mathbf{u})^T q(x) dx = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \int_0^L \mathbf{N}^T q(x) dx$$

✓ 등가 절점하중과 모멘트에 의한 일은,

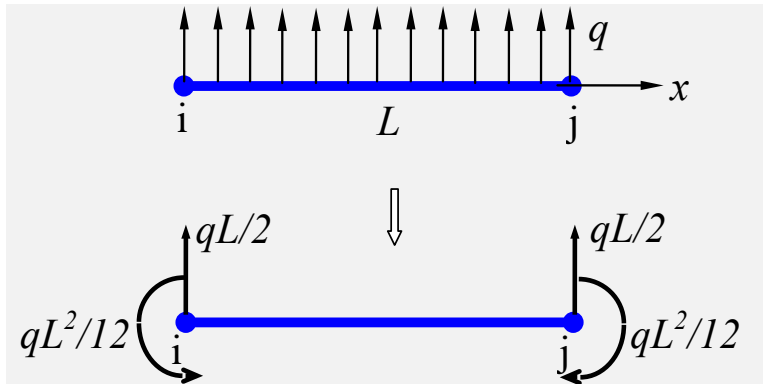
$$W_{f_q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} v_i & \theta_i & v_j & \theta_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_i^q \\ M_i^q \\ F_j^q \\ M_j^q \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{f}_q$$

✓ $W_q = W_{f_q}$ 를 같게 놓으면, 등가의 절점 하중 벡터

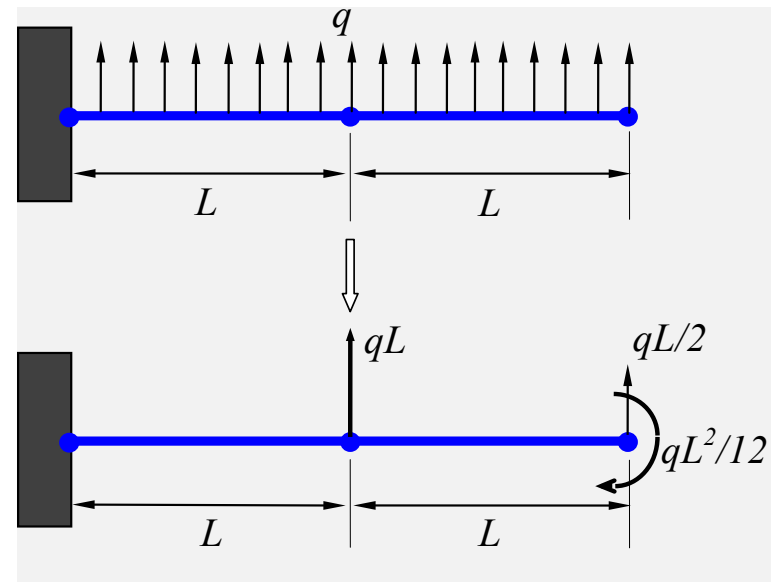
$$\mathbf{f}_q = \int_0^L \mathbf{N}^T q(x) dx$$



✓ 일정한 값 q 에 대해,



균일분포 횡하중을 점점하중과 모멘트로 변환



균일분포 횡하중을 2개의 보 요소에서 변환하기



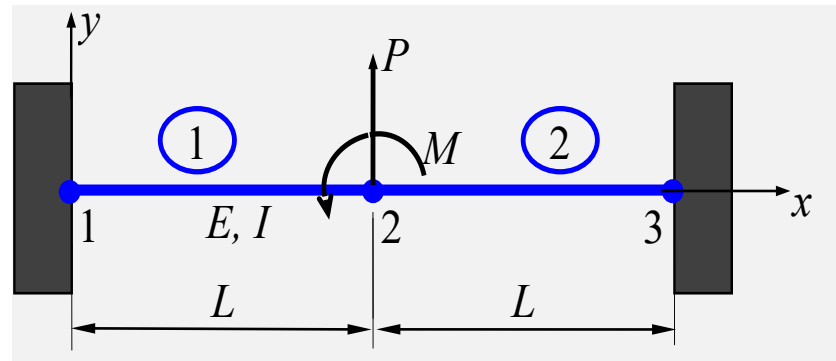
□ 일반적인 보요소의 강성행렬

✓ 일반적인 2차원 보 요소에 대한 강성행렬:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

빔 요소의 예제

예제 3.1



- ✓ 주어진 조건: 그림의 보는 양단이 고정되어 있고 중앙점에 하중 P 와 모멘트 M 을 받는다
- ✓ 계산할 사항: 중앙의 절점에서 처짐과 회전, 그리고 양 지지점에서 지지 반력과 모멘트



✓ 요소강성행렬은,

$$\mathbf{k}_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

✓ 전체 FE 방정식은,

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \\ 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \\ F_{2Y} \\ M_2 \\ F_{3Y} \\ M_3 \end{Bmatrix}$$



✓ 하중과 구속조건(BC's)은,

$$F_{2Y} = -P, \quad M_2 = M, \quad v_1 = v_3 = \theta_1 = \theta_3 = 0$$

✓ 간소화된 FE 방정식

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ M \end{Bmatrix}$$

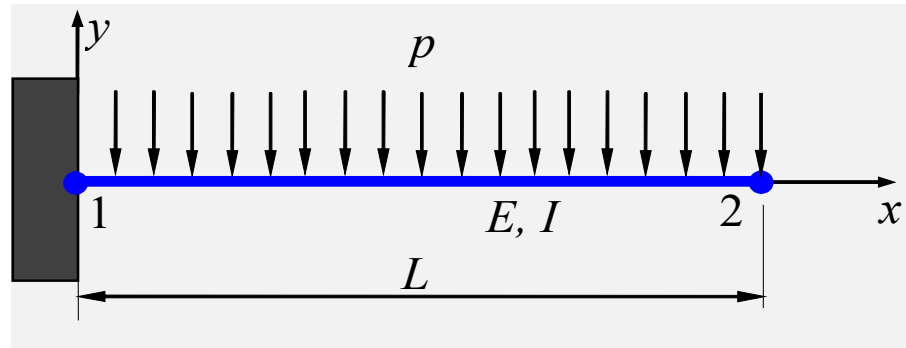
✓ 이 식을 풀면,

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{24EI} \begin{Bmatrix} -PL^2 \\ 3M \end{Bmatrix}$$

✓ 전체 FE 방정식으로부터 지반반력(힘과 모멘트)

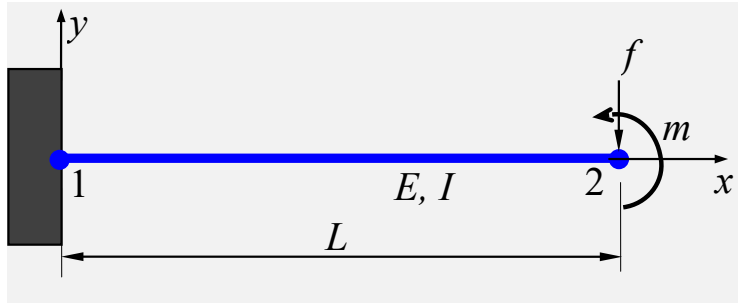
$$\begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \\ F_{3Y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L \\ 6L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 2P + 3M/L \\ PL + M \\ 2P - 3M/L \\ -PL + M \end{Bmatrix}$$

예제 3.2



- ✓ 주어진 조건: 그림과 같이 외팔보(cantilever beam)에 균일한 횡방향 하중 p 가 작용함.
- ✓ 계산할 사항: 우측 단 처짐과 회전, 좌측 단의 지지반력(힘과 모멘트)

✓ 일-등가(work-equivalent) 절점하중



여기서

$$f = pL / 2, m = pL^2 / 12$$

✓ FE 방정식을 적용하면,

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \\ F_{2Y} \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

✓ 하중과 경계조건(BCs)은,

$$F_{2Y} = -f, \quad M_2 = m, \quad v_1 = \theta_1 = 0$$



✓ 간소화된 방정식(reduced equation) 은,

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f \\ m \end{Bmatrix}$$

✓ 이 식을 풀면,

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{6EI} \begin{Bmatrix} -2L^2 f + 3Lm \\ -3Lf + 6m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -pL^4 / 8EI \\ -pL^3 / 6EI \end{Bmatrix}$$

✓ 만일 등가 모멘트 m을 무시하면,

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{6EI} \begin{Bmatrix} -2L^2 f \\ -3Lf \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -pL^4 / 6EI \\ -pL^3 / 4EI \end{Bmatrix}$$

✓ FE 방정식으로부터 반력과 모멘트를 계산하면,

$$\begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pL/2 \\ 5pL^2/12 \end{Bmatrix}$$

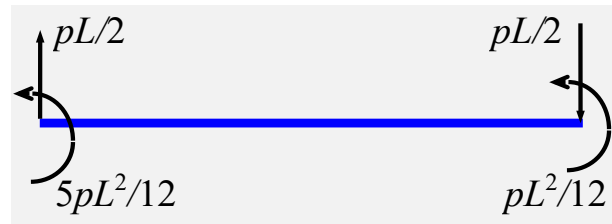
✓ 분포 횡하중 p에 대한 다음의 등가 절점하중을 포함

$$\begin{Bmatrix} -pL/2 \\ -pL^2/12 \end{Bmatrix}$$

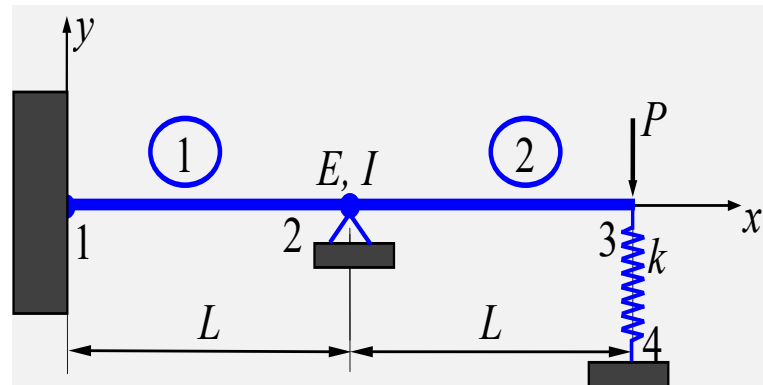
✓ 올바른 지지반력,

$$\begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pL/2 \\ 5pL^2/12 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -pL/2 \\ -pL^2/12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pL \\ pL^2/2 \end{Bmatrix}$$

✓ 결과의 점검:



예제 3.3



- ✓ 주어진 조건: $P = 50 \text{ kN}$, $k = 200 \text{ kN/m}$, $L = 3 \text{ m}$, $E = 210 \text{ GPa}$, $I = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^4$.
- ✓ 구할 사항: 처짐, 회전각(Rotation), 반력



- ✓ 보는 절점 2에서 로울러(또는 힌지)로 지지되고, 절점 3에서 스프링으로 지지.
2개의 보 요소와 하나의 스프링 요소를 사용하여 이 문제의 해 구함

- ✓ 스프링의 강성행렬은

$$\mathbf{k}_s = \begin{bmatrix} v_3 & v_4 \\ k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

- ✓ 강성행렬을 조합하여 다음과 같이 전체 FE 방정식을 얻음

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 & v_4 \\ 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & & & 12+k' & -6L & -k' \\ & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & k' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \\ F_{2Y} \\ M_2 \\ F_{3Y} \\ M_3 \\ F_{4Y} \end{Bmatrix}$$

Symmetry

여기서 $k' = \frac{L^3}{EI} k$



✓ 경계조건을 적용

$$v_1 = \theta_1 = v_2 = v_4 = 0,$$

$$M_2 = M_3 = 0, \quad F_{3Y} = -P$$

✓ 간소화된 식은,

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ -6L & 12 + k' & -6L \\ 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

✓ 이 식을 풀면 절점 2와 3에서 처짐과 회전각,

$$\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = -\frac{PL^2}{EI(12 + 7k')} \begin{Bmatrix} 3 \\ 7L \\ 9 \end{Bmatrix}$$

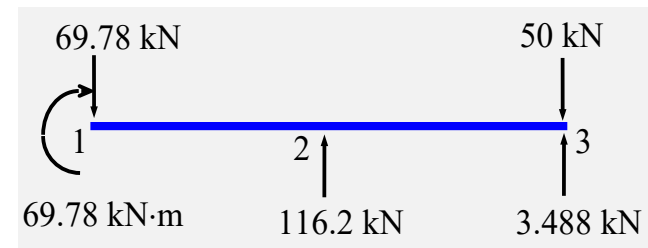
✓ 주어진 숫자를 대입하여 다음 결과를 얻음

$$\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.002492 \text{ rad} \\ -0.01744 \text{ m} \\ -0.007475 \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

✓ 절점의 지반반력은,

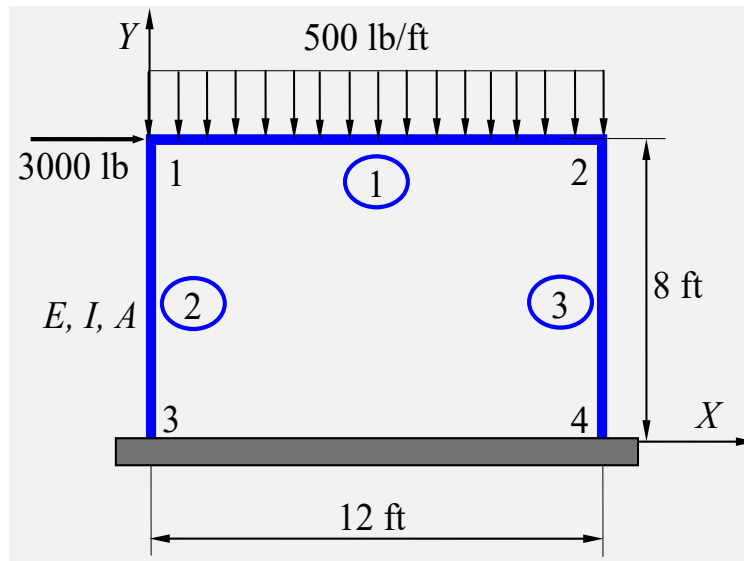
$$\begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \\ F_{2Y} \\ F_{4Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -69.78 \text{ kN} \\ -69.78 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ 116.2 \text{ kN} \\ 3.488 \text{ kN} \end{Bmatrix}$$

✓ 결과의 점검:





예제 3.4

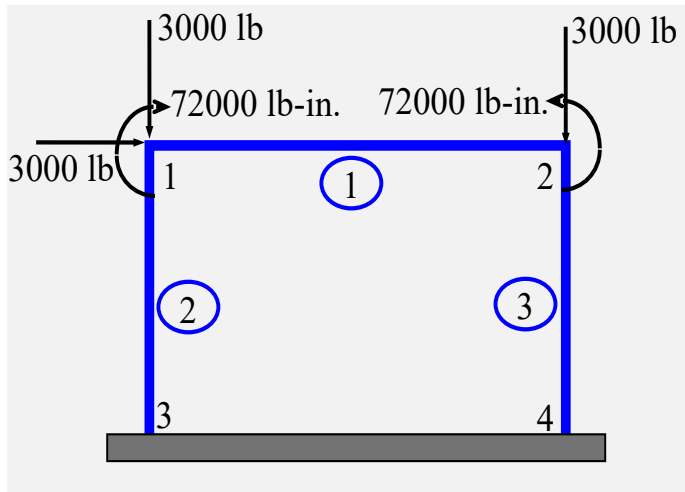


✓ 주어진 조건: $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$, $I = 65 \text{ in.}^4$, $A = 6.8 \text{ in.}^2$

✓ 구할사항: 절점 1과 2의 변위와 회전각



- ✓ 먼저 분포하중을 등가의 절점하중으로 바꾼 후에 다음과 같은 FE 모드를 얻음



- ✓ 국소(local coordinate)좌표계에서 일반적인 2차원 일반적인 보 요소에 대한 강성행렬은,

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$



✓ 요소 결합(Element Connectivity) 표

Element	Node i (1)	Node j (2)
1	1	2
2	3	1
3	4	2

✓ 요소 1의 강성행렬은,

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_1' = 10^4 \times \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \\ 141.7 & 0 & 0 & -141.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.784 & 56.4 & 0 & -0.784 & 56.4 \\ 0 & 56.4 & 5417 & 0 & -56.4 & 2708 \\ -141.7 & 0 & 0 & 141.7 & 0 & 0 \\ 0 & -0.784 & -56.4 & 0 & 0.784 & -56.4 \\ 0 & 56.4 & 2708 & 0 & -56.4 & 5417 \end{bmatrix}$$



✓ 요소 2와 3에 대한 국소좌표계에서의 강성행렬:

$$\mathbf{k}_2' = \mathbf{k}_3' = 10^4 \times \begin{bmatrix} u_i' & v_i' & \theta_i' & u_j' & v_j' & \theta_j' \\ 212.5 & 0 & 0 & -212.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2.65 & 127 & 0 & -2.65 & 127 \\ 0 & 127 & 8125 & 0 & -127 & 4063 \\ -212.5 & 0 & 0 & 212.5 & 0 & 0 \\ 0 & -2.65 & -127 & 0 & 2.65 & -127 \\ 0 & 127 & 4063 & 0 & -127 & 8125 \end{bmatrix}$$

✓ 여기서 요소 2에 대해 $i = 3, j = 1$ 이고 요소 3에 대해 $i = 4, j = 2$ 이다.



✓ 변환행렬(transformation matrix) $\mathbf{T}$ 는,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

✓ 요소 2와 3에 대해 $l = 0, m = 1$ 이므로

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



✓ 변환관계를 이용하면,

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}' \mathbf{T}$$

✓ 요소 2와 3의 전체좌표계에서 강성행렬

$$\mathbf{k}_2 = 10^4 \times \begin{bmatrix} u_3 & v_3 & \theta_3 & u_1 & v_1 & \theta_1 \\ 2.65 & 0 & -127 & -2.65 & 0 & -127 \\ 0 & 212.5 & 0 & 0 & -212.5 & 0 \\ -127 & 0 & 8125 & 127 & 0 & 4063 \\ -2.65 & 0 & 127 & 2.65 & 0 & 127 \\ 0 & -212.5 & 0 & 0 & 212.5 & 0 \\ -127 & 0 & 4063 & 127 & 0 & 8125 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_3 = 10^4 \times \begin{bmatrix} u_4 & v_4 & \theta_4 & u_2 & v_2 & \theta_2 \\ 2.65 & 0 & -127 & -2.65 & 0 & -127 \\ 0 & 212.5 & 0 & 0 & -212.5 & 0 \\ -127 & 0 & 8125 & 127 & 0 & 4063 \\ -2.65 & 0 & 127 & 2.65 & 0 & 127 \\ 0 & -212.5 & 0 & 0 & 212.5 & 0 \\ -127 & 0 & 4063 & 127 & 0 & 8125 \end{bmatrix}$$



✓ 전체 FE 방정식을 결합하고, 다음의 경계조건을 고려하면,

$$u_3 = v_3 = \theta_3 = u_4 = v_4 = \theta_4 = 0$$

$$F_{1X} = 3000\text{lb}, \quad F_{2X} = 0, \quad F_{1Y} = F_{2Y} = -3000\text{lb},$$

$$M_1 = -72000\text{lb} \cdot \text{in.}, \quad M_2 = 72000\text{lb} \cdot \text{in.}$$

✓ 간소화된 FE 방정식(condensed FE equation)은 다음과 같다.

$$10^4 \times \begin{bmatrix} 144.3 & 0 & 127 & -141.7 & 0 & 0 \\ 0 & 213.3 & 56.4 & 0 & -0.784 & 56.4 \\ 127 & 56.4 & 13542 & 0 & -56.4 & 2708 \\ -141.7 & 0 & 0 & 144.3 & 0 & 127 \\ 0 & -0.784 & -56.4 & 0 & 213.3 & -56.4 \\ 0 & 56.4 & 2708 & 127 & -56.4 & 13542 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3000 \\ -3000 \\ -72000 \\ 0 \\ -3000 \\ 72000 \end{Bmatrix}$$



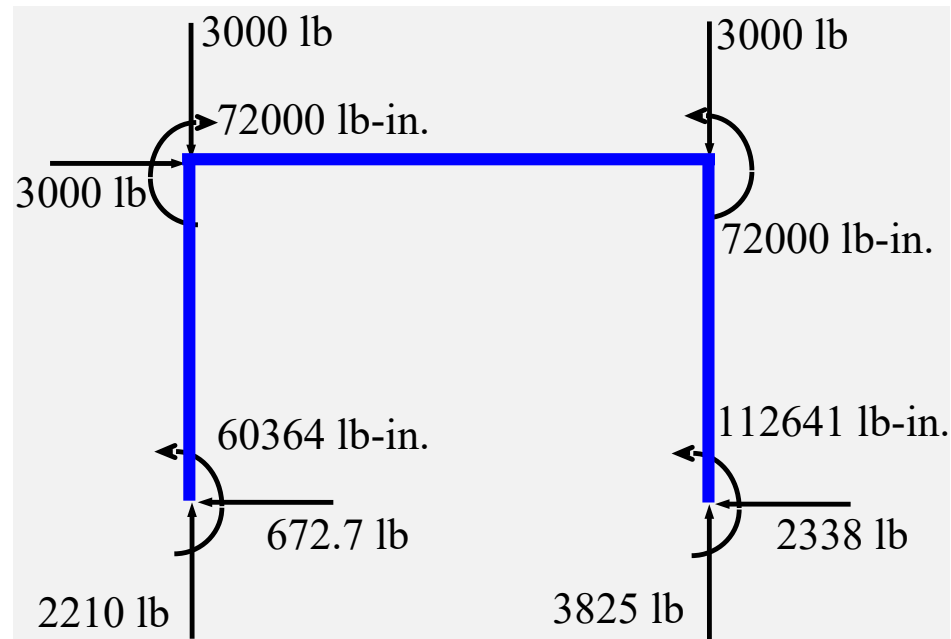
✓ 위 식을 풀면 다음의 결과를 얻음

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.092 \text{ in.} \\ -0.00104 \text{ in.} \\ -0.00139 \text{ rad} \\ 0.0901 \text{ in.} \\ -0.0018 \text{ in.} \\ -3.88 \times 10^{-5} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

✓ 지지 반력과 모멘트를 계산하기 위하여 요소 2와 3에 대한 요소 FE 방정식을 구하고 앞에서 구한 절점 변위행렬을 대입하면,

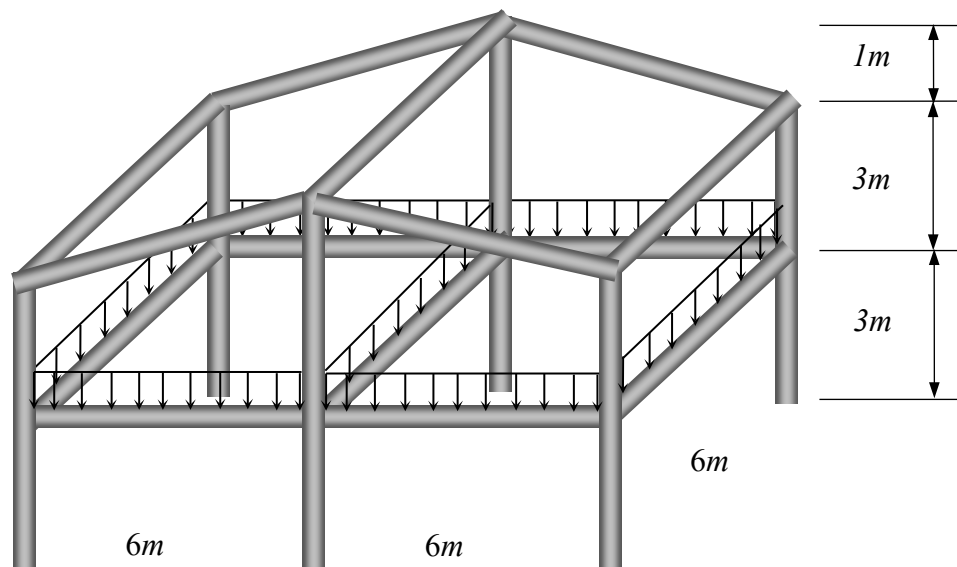
$$\begin{Bmatrix} F_{3X} \\ F_{3Y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -672.7 \text{ lb} \\ 2210 \text{ lb} \\ 60364 \text{ lb} \cdot \text{in.} \end{Bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{Bmatrix} F_{4X} \\ F_{4Y} \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2338 \text{ lb} \\ 3825 \text{ lb} \\ 112641 \text{ lb} \cdot \text{in.} \end{Bmatrix}$$

✓ 결과 점검:



ANSYS Workbench를 이용한 사례연구

- ✓ 문제 설명: 저층 건축물에 대해 강재 프레임 시스템을 사용하면 비용 면에서 유리하다. 높은 강도 대 무게 비를 가지며, 조립식으로 주문 설계가 가능하다. 아래 그림과 같이 구조용 강재 I-형 보로 지어진 2층의 건물을 고려하자. 그림과 같이 50kN/m의 균일하중이 2층에 작용할 때 프레임의 변형과 응력을 구하라.



Material: Structural Steel

Line pressure: 50 kN/m

I-Beam size: W356 × 171

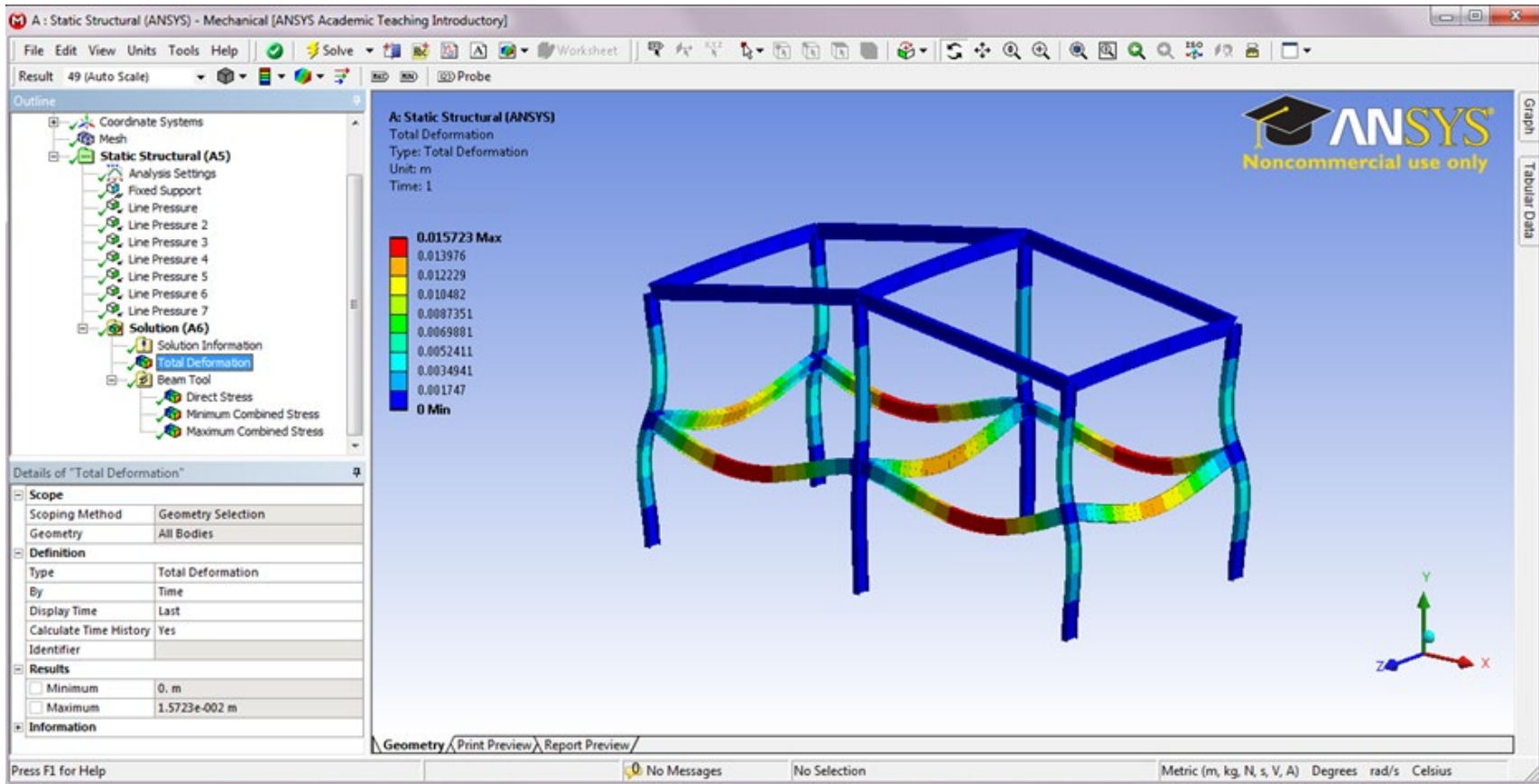
beam depth = 355.6 mm

flange width = 171.5 mm

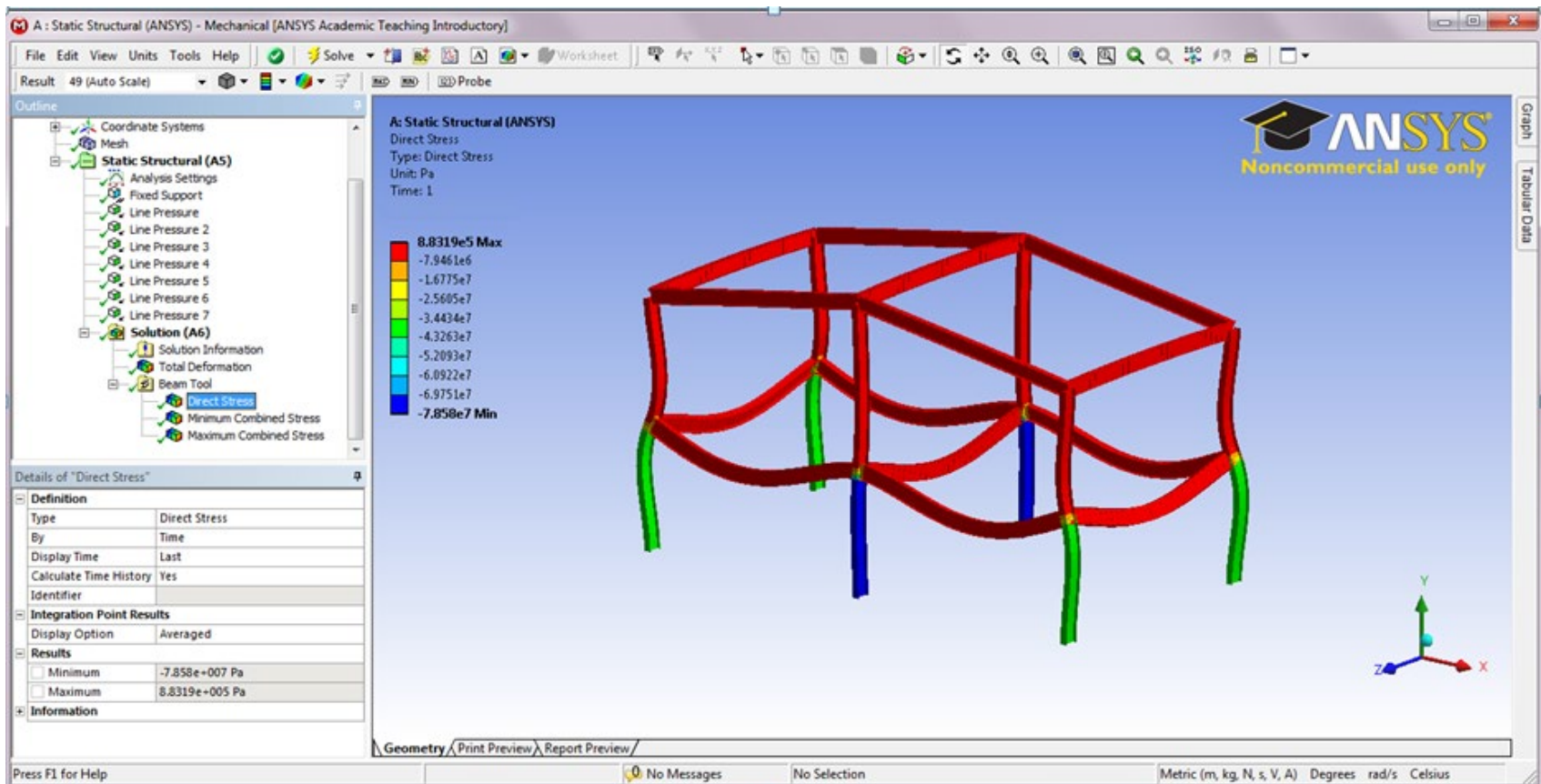
web thickness = 11.5 mm

flange thickness = 7.3 mm

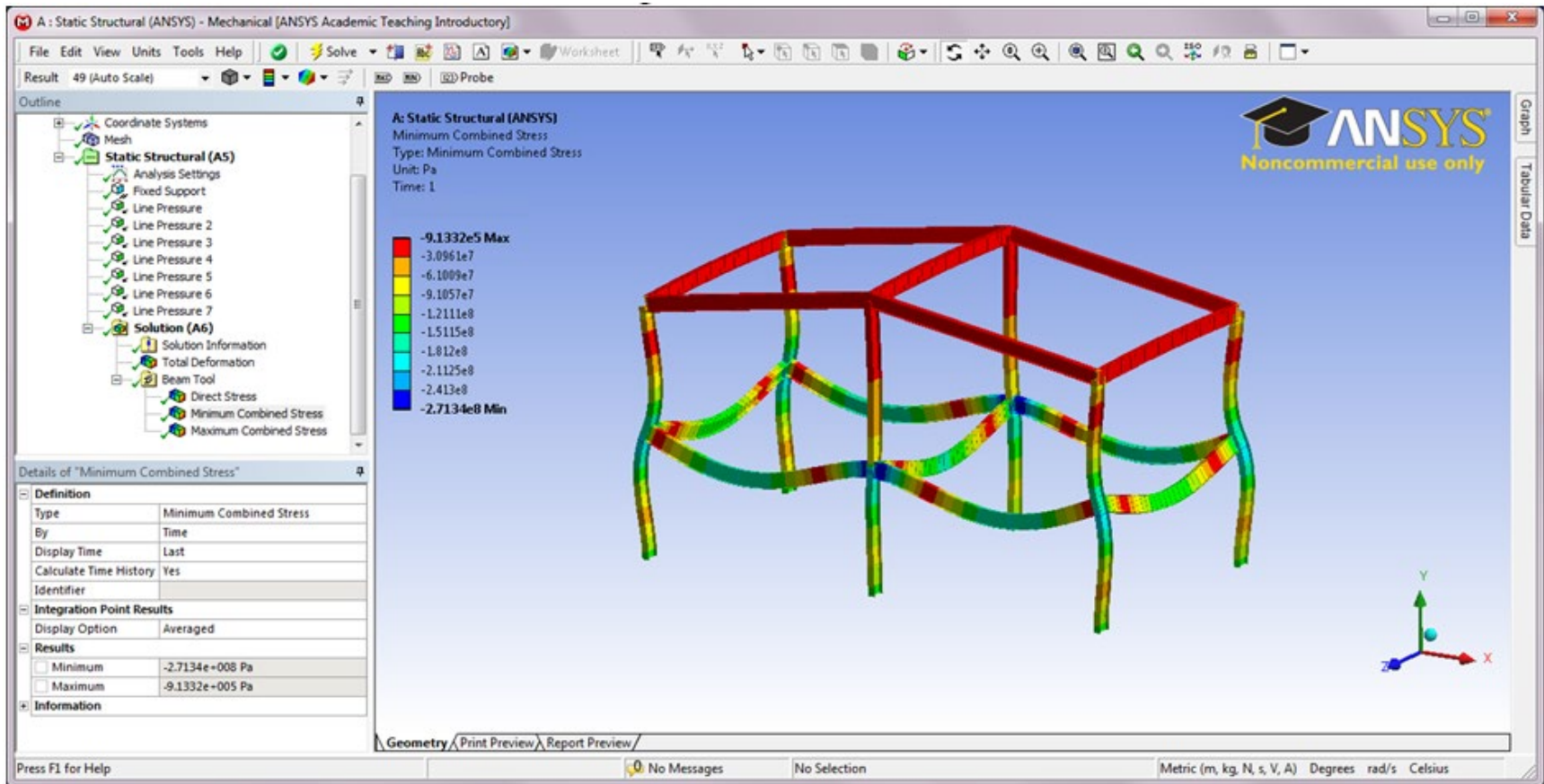
✓ Static Structural Analysis (정적구조 해석)을 실행하여 프레임 변형 결과를 검토하시오.



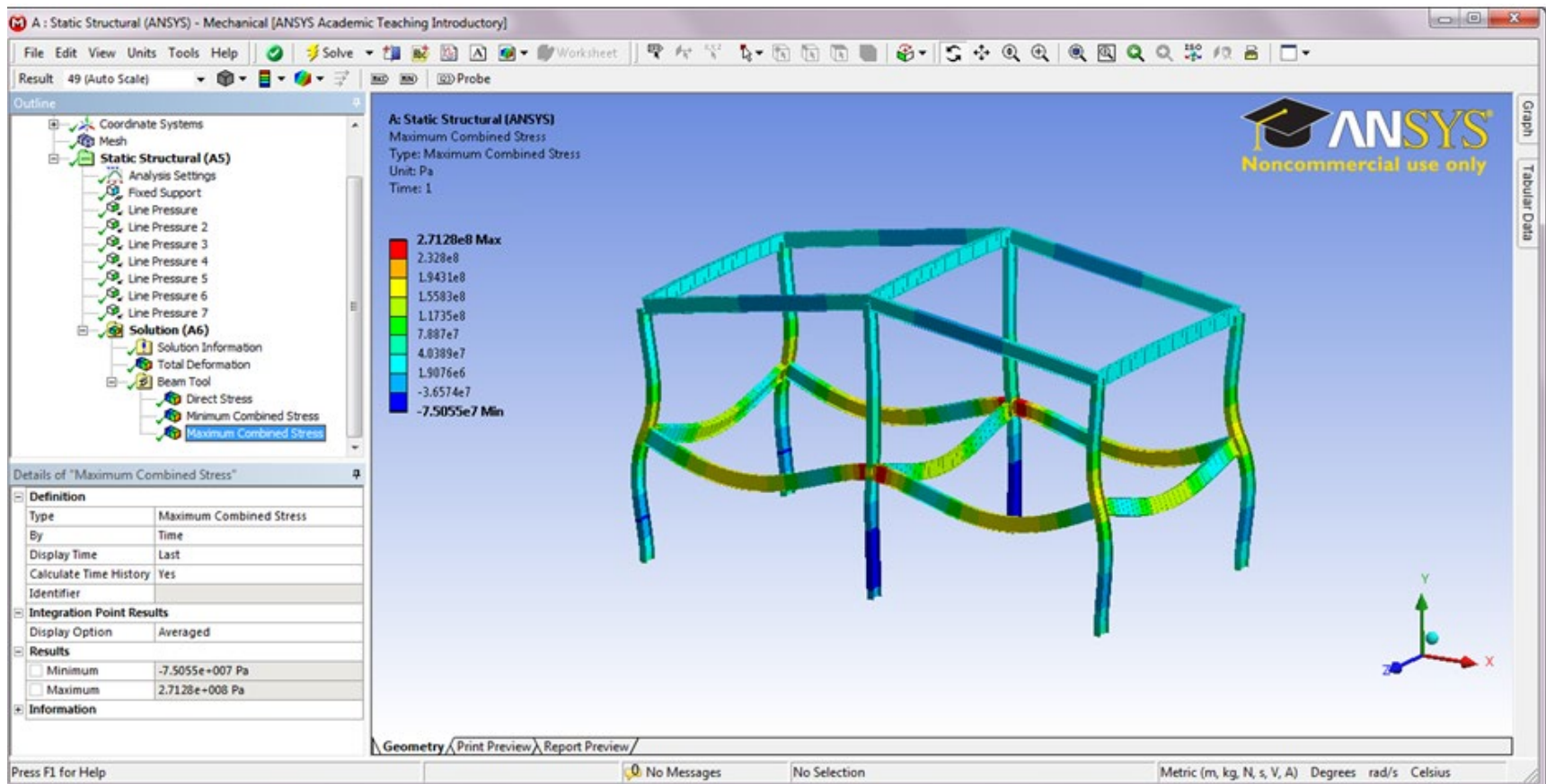
✓ Beam Tool 밑에 있는 Direct Stress를 클릭하고 보에서 축방향 응력 결과를 검토한다.



- ✓ Beam Tool 밑의 Minimum Combined Stress를 클릭하여 보에서 Direct Stress와 Minimum Bending Stress가 선형 조합된 결과를 검토한다



- ✓ Beam Tool 밑의 Maximum Combined Stress를 클릭하여 보에서 Direct Stress와 Maximum Bending Stress 가 선형 조합된 결과를 검토한다.



이 장에서 배운 내용은 다음과 같다.

- ✓ 프레임 해석에 사용할 수 있는 보 요소에 대한 학습
- ✓ 형상함수 개념을 더 살펴보고, 에너지 접근법을 사용하여 강성 행렬을 유도
- ✓ 분포하중 처리에 대해 공부하고 몇 가지 예를 고려
- ✓ I-type 보를 사용한 2 층 건물 구조에 대해 ANSYS Workbench를 이용하여 해석